Elementarna matematika 2

Rješenja zadataka s vježbi
Šesti tjedan

Zadatak 1. Dan je trapez koji nije paralelogram. Dokažite da mu sjecište produžetaka krakova i polovišta osnovica leže na istom pravcu.

Rješenje. Neka nam je A ishodište svih radijvektora ($O \equiv A$), sve vektore u ravnini možemo izraziti preko $\overrightarrow{b} := \overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{d} = \overrightarrow{AD}$ jer oni čine bazu vektora za ravninu.

Budući da nam dani trapez nije paralelogram to postoji pozitivni realni broj $\alpha \neq 1$ takav da je $\overrightarrow{DC} = \alpha \cdot \overrightarrow{AB}$. Bitno je napomenuti da je α konstanta svojstvena danom trapezu, a ne varijabla.

Pretpostavimo bez smanjenja općenitosti da je $\alpha < 1$ to jest da je $|DC| < |AB|$. Neka je S sjecište pravaca AD i BC. Kako su trokuti $\triangle SDC$ i $\triangle SAB$ slični to je

$$|SD| : |SA| = |SC| : |SB| = |DC| : |AB| = \alpha.$$

Odakle imamo da je $\overrightarrow{DS} = \alpha \cdot \overrightarrow{AS}$ i $\overrightarrow{CS} = \alpha \cdot \overrightarrow{BS}$ Kako je $\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DS} = \overrightarrow{d} + \alpha \cdot \overrightarrow{AS}$ imamo da je

$$\overrightarrow{s} = \overrightarrow{AS} = \frac{\overrightarrow{d}}{1-\alpha}.$$

Označimo sa M polovište stranice $\overline{AB}$ i sa N polovište stranice $\overline{DC}$. Dokazat ćemo da su M, N i S kolinearne točke tako što ćemo pronaći $\lambda > 1$ takav da je $\overrightarrow{SM} = \lambda \cdot \overrightarrow{SN}$, odnosno da se M nalazi na produžetku stranice $\overline{SN}$. Imamo da je

$$\overrightarrow{m} = \overrightarrow{AM} = \frac{\overrightarrow{b}}{2} \quad \text{i} \quad \overrightarrow{n} = \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN} = \frac{\alpha \overrightarrow{b}}{2} + \overrightarrow{d}.$$

Sada je

$$\overrightarrow{SM} = \overrightarrow{m} - \overrightarrow{s} = \frac{\overrightarrow{b}}{2} - \frac{\overrightarrow{d}}{1-\alpha}$$
$$\overrightarrow{SN} = \overrightarrow{n} - \overrightarrow{s} = \frac{\alpha \overrightarrow{b}}{2} + \overrightarrow{d} - \frac{\overrightarrow{d}}{1-\alpha} = \frac{\alpha \overrightarrow{b}}{2} - \frac{\alpha \overrightarrow{d}}{1-\alpha} = \alpha \cdot \overrightarrow{SM}.$$

Dakle $\lambda = \alpha$, što je i bilo za očekivati jer je koeficijent sličnosti između trokuta $\triangle SDC$ i $\triangle SAB$ upravo α.

$\square$

Napomena: Iako smo prezentirali rješenje zadatka koristeći vektore, puno prirodnije rješenje dobivamo koristeći tehniku *homotetije*, koju zbog njene netr. Homotetija je preslikavanje koje postoji između svaka dva slična trokuta $\triangle XYZ$ i $\triangle X'Y'Z'$ koja imaju po parovima paralelne stranice $XY || X'Y'$, $YZ || Y'Z'$ i $ZX || Z'X'$, u tom slučaju se može dokazati da se pravci

XX', YY' i ZZ' sijeku u jednoj točki C koju nazivamo centar homotetije. Ako je k koeficijent sličnosti (s predznakom) između trokuta $\triangle XYZ$ i $\triangle X'Y'Z'$ ($k = \overrightarrow{XY} : \overrightarrow{X'Y'}$, predznak je bitan jer su moguće dvije vrste homotetija, jedna koja je samo skaliranje i druga koja je kompozicija centralne simetrije i skaliranja), tada homotetiju $\mathcal{H}_{C,k}$ definiramo kao preslikavanje sa euklidske ravnine u samu sebe takvo da je

$$\mathcal{H}_{C,k}(P) = P', \text{ gdje je } P' \text{ takva da } \overrightarrow{CP'} = k \cdot \overrightarrow{CP}.$$

Ukoliko postoji homotetija između dva trokuta tada se svaka karakteristična točka jednog trokuta pri homotetiji slika u pripadnu karakterističnu točku drugog trokuta. Preslikavanje homotetije je u ovom slučaju $\mathcal{H}_{S,\alpha}$ sa centrom u S i šalje $\triangle SAB$ u $\triangle SDC$, posebno šalje i polovište M stranice AB trokuta $\triangle SAB$ u polovište N stranice DC trokuta $\triangle SDC$. Iz ovoga slijedi da su M, N i centar homotetije S nužno kolinearne.

Zadatak 2. Neka je $ABCD$ paralelogram i T točka na dužini $\overline{AB}$ takve da je $4|AT| = |AB|$. Neka je P presjek pravaca AC i TD. U kojem omjeru točka P dijeli $\overline{AC}$?

Rješenje. Označimo $\vec{u} := \overrightarrow{AD}$ i $\vec{v} := \overrightarrow{AB}$. Primijetimo da su $\vec{u}, \vec{v}$ linearno nezavisni i čine bazu za V^2. P leži na AC, dakle postoji $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da

$$\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AC} = \lambda \vec{u} + \lambda \vec{v}. \tag{1}$$

Slično imamo $P \in DT$ pa je $\overrightarrow{DP} = \mu \overrightarrow{DT}$ za neki $\mu \in \mathbb{R}$. Računamo

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP} &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DP} = \vec{v} + \mu \overrightarrow{DT} = \vec{v} + \mu\left(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AT}\right) = \vec{v} + \mu\left(-\vec{v} + \frac{1}{4}\vec{u}\right) \\ &= \frac{\mu}{4}\vec{u} + (1-\mu)\vec{v}. \end{aligned} \tag{2}$$

S obzirom da su $\vec{u}, \vec{v}$ linearno nezavisni, koeficijenti uz njih u jednadžbama (1) i (2) moraju biti jednaki pa dobijemo linearni sustav

$$\begin{cases} \lambda = \mu/4 \\ \lambda = 1 - \mu. \end{cases}$$

Kad riješimo sustav dobijemo $\mu = \frac{4}{5}$ i $\boxed{\lambda = \frac{1}{5}}$. Dakle $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$, tj. P dijeli $\overline{AC}$ u omjeru $\frac{1}{5}$.

$\square$

Zadatak 3. Na stranici $\overline{AC}$ trokuta ABC leži točka M za koju je $|AM| : |MC| = 2 : 1$, a na stranici $\overline{BC}$ točka N za koju je $|BN| : |NC| = 3 : 1$. Pravci AN i BM sijeku se u točki T. U kojem omjeru točka T dijeli dužinu $\overline{AN}$?

Rješenje. Označimo $\vec{u} := \overrightarrow{CA}, \vec{v} := \overrightarrow{CB}$. Primijetimo da je $\vec{u}, \vec{v}$ baza za V^2. T leži na AN i BM, dakle $\overrightarrow{AT} = \lambda \overrightarrow{AN}$ i $\overrightarrow{BT} = \mu \overrightarrow{BM}$ za neke $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Cilj nam je odrediti λ. Računamo

$$\overrightarrow{AT} = \lambda \overrightarrow{AN} = \lambda \overrightarrow{AC} + \lambda \overrightarrow{CN} = -\lambda \vec{u} + \frac{\lambda}{4}\vec{v}. \tag{3}$$

Slično je $\overrightarrow{BT} = \mu(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM}) = \frac{\mu}{3}\vec{u} - \mu\vec{v}$. Sada računamo $\overrightarrow{AT}$ na drugi način

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AT} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BT} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BT} = -\vec{u} + \vec{v} + \frac{\mu}{3}\vec{u} - \mu\vec{v} \\ &= \left(\frac{\mu}{3} - 1\right)\vec{u} + (1-\mu)\,\vec{v}. \end{aligned} \tag{4}$$

Iz jednadžbi (3) i (4), te činjenice da su $\vec{u}, \vec{v}$ linearno nezavisni, zaključujemo

$$\begin{cases} -\lambda = \mu/3 - 1 \\ \lambda/4 = 1 - \mu. \end{cases}$$

Kad riješimo sustav dobijemo $\boxed{\lambda = \dfrac{8}{11}}$. Dakle T dijeli dužinu $\overline{AN}$ u omjeru $\frac{8}{11}$. $\square$

Zadatak 4. Neka su $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$ linearno nezavisni vektori.

(a) Jesu li vektori $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$ i $\overrightarrow{b} = -\vec{i} + \frac{3}{2}\vec{j} - \frac{1}{2}\vec{k}$ kolinearni?

(b) Jesu li $\vec{a}$ i $\vec{b}$ komplanarni?

(c) Jesu li $\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{i} - \vec{j}$, $2\vec{j}$ komplanarni?

Rješenje.

(a) Da, naime $\vec{a} = -2\vec{b}$.

(b) Da, bilo koja 2 vektora su uvijek komplanarna (jer za svake tri točke uvijek postoji ravnina koja ih sve sadrži).

(c) Da, jer su sva tri linearna kombinacija vektora $\vec{i}$ i $\vec{j}$ pa leže u ravnini razapetoj sa ta dva vektora.

$\square$

Zadatak 5. Zadani su vektori u prostoru $\vec{p}$ i $\vec{q}$ takvi da je $|\vec{p}| = 2, |\vec{q}| = \sqrt{3}$ i $\angle(\vec{p}, \vec{q}) = 30°$. Odredite $|\vec{p} - 2\vec{q}|$.

Rješenje.

$$\vec{p} \cdot \vec{q} = |\vec{p}||\vec{q}| \cos(\angle(\vec{p}, \vec{q})) = 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \cos(30°) = 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3$$

$$\begin{aligned} |\vec{p} - 2\vec{q}|^2 &= (\vec{p} - 2\vec{q}) \cdot (\vec{p} - 2\vec{q}) = \vec{p} \cdot \vec{p} - 4(\vec{p} \cdot \vec{q}) + 4(\vec{q} \cdot \vec{q}) \\ &= |\vec{p}|^2 - 4(\vec{p} \cdot \vec{q}) + 4|\vec{q}|^2 = (2)^2 - 4(3) + 4(\sqrt{3})^2 \\ &= 4 - 12 + 4(3) = 4 - 12 + 12 = 4 \\ \Longrightarrow & \boxed{|\vec{p} - 2\vec{q}| = \sqrt{4} = 2} \end{aligned}$$

$\square$

Zadatak 6. U pravokutnom trokutu ABC duljine stranica trokuta odnose se u omjeru $1 : \sqrt{2} : \sqrt{3}$. Dokažite da su dvije njegove težišnice okomite.

Rješenje. Neka je u C pravi kut. Skaliranjem trokuta možemo bez smanjenja općenitosti pretpostaviti da su stranice duljine 1, $\sqrt{2}$ i $\sqrt{3}$. Dokazat ćemo da je skalarni produkt između dvije težišnice jednak 0. Neka je C ishodište našeg koordinatnog sustava ($C \equiv O$) i neka su $\vec{i}$ i $\vec{j}$ jedinični vektori duž kateta $\vec{a} = \overrightarrow{CB}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{CA}$. Neka je bez smanjenja općenitosti $\vec{a} = \vec{i}$ i $\vec{b} = \sqrt{2} \cdot \vec{j}$. Sada izrazimo težišnice preko $\vec{i}$ i $\vec{j}$.

Način na koji dokazujemo okomitosti koristeći vektore je koristeći sljedeću ekvivalenciju:

$$PQ \perp RS \iff \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{RS} = 0.$$

U ovom zadatku nam je olakotna okolnost što je $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$.

Ako su M, N, P redom polovišta stranica $\overline{BC}, \overline{CA}$ i $\overline{AB}$ tada imamo da je

$$\vec{p} = \overrightarrow{CP} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} = \frac{\vec{i} + \sqrt{2} \cdot \vec{j}}{2}, \quad \vec{m} = \frac{\vec{a}}{2} = \frac{\vec{i}}{2}, \quad \vec{n} = \frac{\vec{b}}{2} = \frac{\sqrt{2} \cdot \vec{j}}{2}.$$

Odredimo sada vektore težišnica $\overrightarrow{AM}$ i $\overrightarrow{BN}$

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{CM} - \overrightarrow{CA} = \vec{m} - \vec{b} = \frac{\vec{i}}{2} - \sqrt{2} \cdot \vec{j}$$

$$\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{CN} - \overrightarrow{CB} = \vec{n} - \vec{a} = \frac{\sqrt{2} \cdot \vec{j}}{2} - \vec{i}$$

Sada ili promatranjem skice ili računanjem skalarnog produkta svih parova vektora $\vec{p}, \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BN}$ pronalazimo:

$$\vec{p} \cdot \overrightarrow{BN} = \left(\frac{\vec{i}}{2} + \frac{\sqrt{2} \cdot \vec{j}}{2} \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{2} \cdot \vec{j}}{2} - \vec{i} \right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}^2}{4} = 0.$$

□

Zadatak 7. Izračunajte duljine vektora:

(a) $\vec{i} \times (\vec{j} + \vec{k}) - \vec{j} \times (\vec{i} + \vec{k}) + \vec{k} \times (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$, ako je $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ortonormirana baza.

(b) $(2\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} + 2\vec{b})$, ako je $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 2, \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$.

Rješenje.

(a)

$$\begin{aligned} \vec{i} \times (\vec{j} + \vec{k}) - \vec{j} \times (\vec{i} + \vec{k}) + \vec{k} \times (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) &= \vec{k} - \vec{j} + \vec{k} - \vec{i} + \vec{j} - \vec{i} \\ &= 2(\vec{k} - \vec{i}). \end{aligned}$$

Duljina tog vektora je

$$\sqrt{2(\vec{k} - \vec{i}) \cdot 2(\vec{k} - \vec{i})} = 2\sqrt{2}.$$

(b) $(2\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} + 2\vec{b}) = 2\vec{a} \times \vec{a} + 2\vec{b} \times \vec{b} + 4\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{a} = 3\vec{a} \times \vec{b}$.

Sinus kuta između $\vec{a}$ i $\vec{b}$ je $\frac{\sqrt{3}}{2}$, pa je tražena duljina jednaka $|3\vec{a} \times \vec{b}| = 3|\vec{a} \times \vec{b}| = 3|\vec{a}||\vec{b}| \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$.

□

Zadatak 8. Izračunajte površinu paralelograma čiji su vrhovi $A = (1, 1, 0)$, $B = (4, 1, 0)$, $C = (2, 2, 0)$, $D = (5, 2, 0)$.

Rješenje. Površina paralelograma je jednaka apsolutnoj vrijednosti vektorskog produkta vektora koji razapinju taj paralelogram. U ovom slučaju, to je $|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$. Imamo $\overrightarrow{AB} = (3, 0, 0)$, $\overrightarrow{AC} = (1, 1, 0)$ pa je površina jednaka

$$\left| \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right| = |(0, 0, 3)| = 3.$$

□